## 6 класс. Решения

**1**. Марсианка посетила Землю. Марсиане едят не чаще одного раза в день (завтракают, обедают или ужинают). Марсиане могут пропустить приемы пищи любое количество дней. За время визита марсианка ела 7 раз. Кроме того, нам известно, что она пропустила не более 7 завтраков, не более 6 обедов и не более 7 ужинов. Сколько дней она могла пробыть на Земле?

**Ответ:** 7, 8 или 9 дней.

**Решение.** Сумма пропущенных приемов пищи и не пропущенных должна быть кратна 3 (так как всего по условию возможных приемов пищи в день – 3). Поэтому всего возможных приемов пищи не больше 27, значит дней – не больше 9. 18 приемов пищи быть не может, тогда Марсианка пробыла бы 6 дней, питалась бы 7 раз, а по условию марсиане едят не чаще раза в сутки. Очевидно, 7, 8 и 9 дней быть могут.

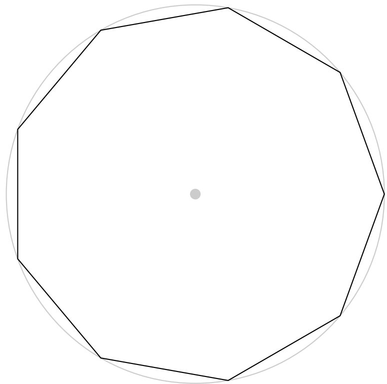


Рис. 1: К задаче **2**.

**2**. Дан правильный 2019-угольник. Можно ли расставить в его вершинах числа $1, 2, 3, ..., 2019$ так, чтобы в вершинах любого равностороннего треугольника стояли три числа, одно из которых являлось бы средним арифметическим двух других?

**Ответ:** Можно.

**Решение.** Заметим, что число 2019 представляется в виде произведения двух простых: 3 и 673. Вершины равностороннего треугольника отстоят друг от друга на расстоянии 672 вершин (т.е. между двумя вершинами равностороннего треугольника «умещается» 672 вершины 2019- угольника).

Расставить числа можно, например, так: $1, 4, 7, 10, ..., 673, ..., 2017$, $2, 5, 8, ..., 674, ..., 2018$, $3, 6, 9, ..., 675, ..., 2019$.

**3**. Сколько чисел от 1919 до 2019 имеют ровно три различных делителя?

**Ответ:** 0.

**Решение.** Раз число имеет только три различных делителя, то оно представляется в виде $p^2$. Рассмотрим два соседних простых: 43 и 47. $43^2 = 1849$, $47^2 = 2209$. Между ними нет ни одного простого. Следовательно, таких чисел нет.

**4**. 19 гирек массой $1, 2, 3, ..., 19$ г разложили на 2 чаши весов так, что есть равновесие. Доказать, что можно убрать по две гири с каждой чаши так, что равновесие не нарушится.

**Решение.** Покрасим все гири на одной чаше в красный цвет, на другой – в синий. Выложим их в ряд в порядке возрастания цветов. Этот ряд разобьем на отрезки подряд идущих гирь одного цвета. Пусть первый отрезок красный.

Пары гирек на стыках назовем красно-синими и сине-красными соответственно.

Нужно найти непересекающиеся красно-синие и сине-красные пары, входящие в них гирьки каждого цвета весят одинаково.

Если есть некрасный отрезок, содержащий более одной гири. На стыках лежат нужные пары.

Есть не менее пяти отрезков. Тогда красно-синие и сине-красные лежат в порядке: $1-2$, $4-5$.

Есть два отрезка. Вес красных должен равняться половине веса вех гирь: $\dfrac{k\cdot(k+1)}{2}=5\cdot 19$. Но это уравнение не имеет нужных решений.

Отрезков три, средний состоит из одной гири. Тогда синяя гиря одна, а такого быть не может.

Отрезка четыре, причем оба средних состоят из одной гири. В этом случае вес красных равен $1+2+\ldots+k+(k+2)=\dfrac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}+1=5\cdot 19$. Такого быть тоже не может.

**5**. Из клетчатого квадрата $37\times 37$ вырезали клетчатый квадрат $35\times 35$ с тем же центром. На какое наименьшее количество кусков нужно разрезать по границе клеток образовавшуюся рамку так, чтобы из них можно было сложить квадрат $12\times 12$?

**Ответ:** на 12 кусков.

**Решение. Оценка.** Если каждый столбец квадрата $12\times 12$ пересекается не меньше чем с двумя клетками какой-нибудь из фигурок, то поскольку разные столбцы не могут так пересекать одну фигурку, фигурок не менее 12. Если же некоторый столбец пересекает каждую фигурку не более чем в одной клетке, то он пересекает 12 различных фигурок.

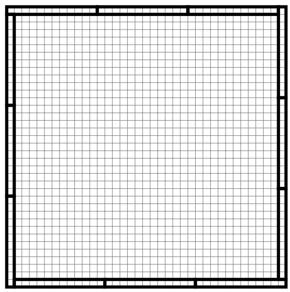

Рис. 2: К задаче **5**.

**Пример.** Разрезание показано на рисунке 2. Чтобы получить квадрат $12\times 12$ нужно расположить полоски друг на друге.